Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VIII No. 2 (2001), pp. 68 – 74

UN PANORAMANA DE LA MATEMÁTICA ACTUAL

ALFONSO CASTRO(*)

En la actualidad, como en tiempos pasados, la matemática se mueve fundamentalmente por su belleza, su aplicabilidad y los desafíos que éstas crean. En el término aplicabilidad tenemos que incluir motivos económicos, políticos y militares. Quizá nada ilustra tan bien este aspecto como la cantidad de dinero que las gobiernos de los países mejor industrializados invierten en el desarrollo matemático. Baste notar que el mayor empleador de matemáticos en los Estados Unidos es la National Security Agency y que, de lejos, en términos de recursos económicos la mayor fuente de financiación de la investigación matemática son los recursos de las oficinas de investigación de los departamentos del ejército, la fuerza aérea y la armada. Pero quizá la mas grande expresión de la aplicabilidad del conocimiento matemático es la concepción como objeto matemático de los útiles y ubicuos computadores dada por el matemático británico Alan Turing.

En los próximos años, debido a las incalculables posibilidades dadas por la información derivada del genoma humano, la industria farmaceútica podría verse necesitada de muchos matemáticos como en los años recientes la industria de los seguros en actuaría y los bancos de inversión en matemática financiera.

Los desafíos son bastante claros: ¿Qué tan grande puede ser una bomba atómica? ¿Cómo jugar en la bolsa de valores para maximizar las ganacias? ¿Qué propiedades geométricas ha de tener un recipiente para que el plasma contenido en su interior sea contenible? ¿En qué lugar poner un satélite para que pueda mantenerse geoestacionario? etc.

(*) Charla presentada en ocasión del 50 aniversario del programa de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, diciembre 5 de 2001.

Alfonso Castro. Department of Applied Mathematics. The University of Texas at San Antonio. San Antonio, Texas 78249. E-mail: acastro@utsa.edu.

Al hablar de la belleza en la matemática basta notar que el más prolífico matemático de los últimos tiempos, Paul Erdös, creía que la matemática es un asunto divino.

Creía que Dios tiene el libro que contiene todos los teoremas con las demostraciones perfectas. Cuando veía alguna demostración muy elegante decía que ésta debía ser de "el libro". La demostración de los griegos de que la raíz de dos es irracional era una de ellas. Erdös decía que su mayor recompensa, su noción del cielo, era que al morir Dios le dejara ver el libro, aunque fuera sólo unas pocas páginas.

Desde que me inicié en la investigación matemática con el Profesor Alan C. Lazer en la Universidad de Cincinnati, me he sentido frente a un bello mural que alguien malignamente ha cubierto con pintura negra. Algo así como cuando pintaron de negro el camino de la humanidad del pintor mejicano Diego Rivera en el Centro Rockefeller de Nueva York. Siento que mi trabajo diario consiste en descascarar con mis rudimentarias herramientas algún pedacito de pintura y poder ver algo más del mural.

Cuando logro hacerlo, aunque es muy de vez en cuando, la satisfacción es inmensa. Para quien no ha tenido la oportunidad de participar en este tipo de actividad es difícil entender la emoción del proceso de descubrimiento. Encontrarse frente a un incontrovertible hecho que le ha tenido mucho tiempo ocupado el cerebro casi al ciento por ciento y que muchas veces uno se creyó incapaz de resolver, es una gran recompensa. Creo que en lo más profundo de nuestros cerebros algún balance químico ocurre cuando nos encontramos con armonía, belleza y funcionalidad.

Al respecto quiero compartir con ustedes una palabras de uno de los mas grandes expertos en mi área de investigación: el Profesor James Serrin.

"I am sure that with the bewildering variety of available problems mathematics will remain a vital science and individual mathematicians will continue to be beckoned, some by general theories, others by the richness of detail to be found in special problems. It seems to me that the next twenty-five years will provide us with "gifted masters and many zealous and enthusiastic disciples" who will make the coming years as vital as those since Hilbert's talk".

Veinticinco años después, en una reunión en Mississippi State University, el mismo profesor Serrin concluyó recomendando a la audiencia "do mathematics for its beauty".

A propósito quiero notar que el Profesor Serrin es miembro de la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos y autor de uno de los artículos de título más corto: $H = W$.

El anterior párrafo del Profesor Serrin es tomado de su artículo titulado "The solvability of boundary value problems", en Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, Vol.28 (1976).

Los problemas propuestos por Hilbert son seguramente el más grande desafío matemático de todos los tiempos y ciertamente el motor más influyente de la matemática del siglo XX. Aunque no todos los problemas han sido resueltos fue mucho lo que se progresó en el siglo anterior. Tras cien años de su planteamiento y con un juicioso análisis, el Instituto Clay profirió un nuevo desafío ofreciendo un premio de un millón de dólares por la solución de cada uno de siete problemas considerados muy importantes para el desarrollo de la matemática no solo en el nuevo siglo, sino en el nuevo milenio. Por ello se les bautizaron como los problemas del milenio. El enunciado exacto de los problemas se encuentra en

http://www.claymath.org/prizeproblems/

Aunque debe haber otras fuentes interesantes de información sobre este desafío, me permito sugerir a

http://www.ma.utexas.edu/millenium_site/mlectures.html

como una buena presentación del tema.

Los problemas son:

(1) P versus NP.
(2) La conjetura de Hodge.
(3) La conjetura de Poincaré.
(4) La hipótesis de Riemann.
(5) Ecuaciones de Yang-Mills y discontinuidad de la masa Existencia y regularidad de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes.
(6) Las conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer.

Seguramente veremos grandes cantidades de artículos haciendo alusión a los problemas del milenio. En realidad son problemas que han causados muchos desvelos. El célebre matemático Marvin Shinbrot solía decir en confidencia que su sueño profesional era mostrar la existencia de soluciones suaves para las Ecuaciones de Navier-Stokes, inmediatamente tomar un avión a París y poner la demostración sobre el escritorio de Jean Leray. Desafortunadamente Marvin murió sin cumplir su sueño.

Aunque no de la alcurnia de los problemas de Hilbert, o los del milenio, encontramos algunos otros desafíos. Por ejemplo, la colección de problemas conocidos como el Libro Escocés son una buena fuente de inspiración. El título de este libro se refiere a que colecciona los problemas propuestos por la comunidad matemática de Lwow (Polonia) que se reunía en el Café Escocés antes de la segunda guerra mundial. Su innegable líder fue Stefan Banach. Los problemas propuestos en el Cafe Escocés también tienen premio. Quizá el mas renombrado es demostrar, o dar un contrajemplo, de que todo espacio de Banach separable tiene una base de Schauder. Este problema eventualmente fue resuelto por el matemático sueco Per Enflo. Cuando Enflo presentó su contrajemplo en la Academia de Ciencias de Polonia, el presidente le entregó el respectivo premio: un ganso vivo.

Amplios sectores de la teoría de números y la geometría se han visto beneficiados durante los últimos cuarenta años por los problemas de Erdös. Paul Erdös solía poner precio a los problema que no podía resolver. Sus premios iban desde cinco dólares hasta diez mil dólares. Debe haber mucho billete de cinco dólares enmarcado. Mi Profesor, Alan Lazer, desafía a uno de sus últimos estudiantes, mi colega Chen Chang, con premios que van de veinte a mil dólares. Chen orgullosamente muestra en su apartamento el único billete de veinte dólares que ha obtenido de su maestro, está cuidadosamente enmarcado.

Otro desafío que espero atraiga mucho interés es la conjetura de Beal. Esta dice: *Si A, B, C, x, y, z son enteros positivos, $x > 2, y > 2$ y $z > 2$, y $A^x + B^y = C^z$ entonces A, B, C tienen un factor en común.*

Además del contenido matemático de la conjetura, vale la pena hablar de su autor: Andy Beal. Andy Beal es un rico tejano, de esos que uno se imagina al ver en televisión la serie “Dallas”. Entre otras empresas, es dueño de un banco, su banco, el Beal Bank. Tengo entendido que lo heredó de su padre cuando era aún muy joven. Al mismo tiempo que cuida de sus empresas comerciales, Beal dedica tiempo a pensar en problemas de teoría de números; lo hace en su oficina de banquero.

Cuando se enteró de los rumores de que en la Universidad de Princeton estaban muy cerca de resolver el problema de Fermat, Beal vino a la Universidad de North Texas, mi lugar de empleo en ese entonces, y pidió hablar con algún profesor. Como es común que a los departamentos de matemáticas lleguen personas algo extrañas creyendo que han hecho una gran demostración, al principio nadie notó el hecho. Afortunadamente los Profesores Mauldin y Neuberger tuvieron a bien gastar un poquito de tiempo en el advenedizo. Realmente se sorprendieron al ver que una persona totalmente desconectada de la comunidad matemática, sin un entrenamiento formal en la investigación y que tiene que atender múltiples ocupaciones de mucho dinero tuviera tanto interés y conocimiento matemático. Mauldin y Neuberger estudiaron las notas que había desarrollado Beal. Aunque no creo que hubieran encontrado resultados publicables, sí se dieron cuenta que la conjetura era digna de ser estudiada. Eventualmente Mauldin se atrevió a publicarla y hoy es otro de nuestros desafíos. Para mayor información sobre la conjetura de Beal se puede consultar:

http://www.math.unt.edu/ mauldin/beal.html

Beal ofreció incialmente un premio de cincuenta mil dólares por la solución de la conjetura; actualmente lo ha incrementado a cien mil dólares.

El caso de Beal puede tomarse como la excepción. Como se ve, por ejemplo, en las actividades de Erdös o en el desarrollo del Libro Escocés la matemática es una actividad eminentemente social. Recuerdo con mucho agrado las interminables sesiones que pasabamos en la cafetería central de la Universidad Nacional dedicando interminables jornadas a la solución de los problemas de libros como el Cálculo de Granville, el Álgebra de Herstein o el Análisis de

Apostol. Cuando redactaba estas líneas caí en la cuenta de un estudio hecho por Uri Treisman en la Universidad de California en Berkeley. En ese estudio se quería determinar por qué negros y latinos no tenían el éxito de los blancos en estudios de ciencias. La conclusión fue que no lograban asociarse en grupos que los permitieran sentarse a discutir, cooperar o desafiarse con problemas. De ese estudio se procedió a promover en algunas universidades algo conocido como "comunidades del aprendizaje". Me alegra que fuí partícipe de muchas de ellas sin necesidad de un estudio de Berkeley.

Antes de pasar al tema final de esta charla, quiero notar que un factor importante en la solución de problemas que han estado abiertos por mucho tiempo ha sido el uso de técnicas en principio ajenas al problema. Por ejemplo, en años recientes se han hecho impresionantes progresos en la Teoría de Espacios de Banach introduciendo herramientas de la lógica y del análisis combinatorio. Me alegra reportar que mi colega y compatriota José Iovino está en la frontera de estos desarrollos. Seguramente el Profesor Xavier Caicedo nos ilustrará sobre el tema en la conferencia de clausura.

Volviendo a mi mural, creo que uno de los momentos más placenteros de mi actividad investigativa tuvo lugar cuando pude sugerirle al Profesor Lazer ideas que demuestran que el problema de Dirichlet

$$\Delta u + g(u) = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(x) = 0 \text{ en } \partial\Omega \tag{1}$$

tiene tres soluciones si $g(0) = 0$, $g'(0) < \lambda_k < \lambda_j$, $g'(u) > \lambda_j + \epsilon$ cuando $|u|$ es grande, $g'(u) < \lambda_{j+1}$ para todo u. En (1) Ω es cualquier región acotada y $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \to \infty$ son los valores propios de $-\Delta$.

Posteriormente, de largas conversaciones con el Profesor Jorge Cossio, entonces mi alumno en la Universidad del Norte de Tejas, concluimos que debía haber cinco soluciones si en las hipótesis anteriores se tomaba $k = 1$ y $j \geq 2$. Tuvimos la fortuna de demostrar nuestra conjetura. Calladamente, como seguramente lo han hecho otros, nos propusimos demostrar que si j es grande entonces (1) debe tener muchas soluciones. Es decir tenemos la siguiente conjetura:

Conjetura 1. (\$250) *Para cualquier region acotada Ω y un entero positivo m existe un entero positivo j_0 tal que si $j \geq j_0$, $g(0) = 0$, $g'(0) < \lambda_1$, $g'(t) \leq a < \lambda_{j+1}$ y $g'(t) > b > \lambda_j$, entonces (1) tiene m soluciones.*

A. Castro y J. Cossio, *Multiple solutions for a semilinear Dirichlet problem"*, SIAM J. MATH. ANAL., **25** (1994), 1554-1561.

Relacionada con la anterior conjetura está el problema de demostrar que si en (1) el rango de g' incluye infinitos valores propios de $-\Delta$ entonces el problema debe tener infinitas soluciones. Esta problemática se puede centralizar en la siguiente conjetura.

Conjetura 2. (\$251) *Si $g(t) = |t|^p t$ para $t \geq 0$, $g(t) = |t|^q t$ para $t \leq 0$, $p, q \in (0, 4/(N-2)$, $p \neq q$, entonces (1) tiene infinitas soluciones.*

Que (1) tiene infinitas soluciones cuando $p = q$ se sabe desde hace más de setenta años. No se conoce contraejemplo, sí se saben casos particulares que sugieren que la respuesta a la conjetura es afirmativa.

Algunas referencias al respecto son:

(1) A. Bahri and P.-L. Lions, *Morse index of some min-max critical points. I. Application to multiplicity results*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 1027-1037.
(2) A. Castro and A. Kurepa, *Infinitely many radially symmetric solutions to a superlinear dirichlet problem in a ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 57-64.
(3) A. Castro, *Infinitely many solutions for a Neumann problems in tilable regions*, preprint.

Relacionado también con la primera conjetura está un problema abierto en el área de los *problemas con saltos.* Consideramos entonces el problema.

$$\Delta u + g(u) = p(x) + t\phi_1(x) \;\text{ in } \Omega, \quad u(x) = 0 \text{ en } \partial\Omega, \tag{2}$$

aquí ϕ es una función propia asociada al valor propio λ_1.

Conjetura 3. (\$252) *Dado un entero positivo m existe un entero positivo j_0 tal que si $\lim_{t\to-\infty} g'(t) < \lambda_1$, $\lim_{t\to\infty} g'(t) \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$ entonces para $t > 0$ suficientemente grande el problema (2) tiene por lo menos m soluciones.*

Algunas referencias al respecto son:

(1) A. Castro and H. Kuiper, *On the number of radially symmetric solutions to Dirichlet problems with jumping nonlinearities of superlinear order*, Transactions of the Amer. Math. Soc., **351** no. 5 (1999), 1919-1945.
(2) A. C. Lazer and P. J. McKenna, *Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis.* SIAM Rev. 32 no. 4 (1990), 537–578.

Volviendo a la conjetura 2, quiero hacer notar que es muy poco lo que se sabe sobre el rango de operadores semilineales cuando el rango de la derivada de la nolinealidad incluye infinitos valores propios. Para salirnos del caso de operadores elípticos procedo a plantear una conjetura relacionada con operadores hiperbólicos. Esta conjetura aparece a raíz del trabajo doctoral del Profesor José F. Caicedo, primera tesis doctoral en matemáticas en Colombia.

Conjetura 4. (\$253) *Consideremos la ecuación de onda*

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= g(u) + p(x,t) = p(x, t + \sqrt{2}\pi) \quad (x,t) \in (0,\pi) \times R \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad u(x,t) = (x, t + \sqrt{2}\pi). \end{aligned} \tag{3}$$

Sea $\Sigma = \{k^2 - 2j^2; k = 1, 2, \ldots, j = 0, 1, \ldots\}$. *Supongamos que*

$$\lim_{|t|\to\infty} g'(t) \notin \Sigma$$

y que $g'(R)$ contiene más de un elemento de Σ.

Existe $p : [0,\pi] \times R \to R$ tal que $p(x,t) = p(x, t+\sqrt{2}\pi)$, $p \in L^2([0,\pi] \times [0, \sqrt{2}\pi])$ tal que el problema (3) no tiene solución de clase C^1.

Material relacionado con esta conjetura se puede encontrar en:

(1) A. Castro y S. Unsurangsie, *A semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity,* Pacific Journal of Mathematics, **132** no. 2 (1988).

(2) A. Castro y José F. Caicedo, *A semilinear wave equation with derivative of nonlinearity containing multiple eigenvalues of infinite multiplicity*, Contemporary Mathematics, **208** (1997), 111-132.

NOTA: *Las cantidades precedidas por el signo de dólares no son un error de TEX; es el premio que ofrece el autor a quien primero resuelva la correspondiente conjetura y su solución sea confirmada por la aceptación del correspondiente artículo en una revista matemática de reconocido prestigio.*